

Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 4 (Le produit scalaire dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Produit scalaire

1-2/ Base et repère (orthonormé direct)

II- Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$

III- Formules trigonométriques

3-1/ Formules de $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$

3-2/ Surface d'un triangle et d'un parallélogramme

IV- Droite dans le plan (Étude analytique)

4-1/ Vecteur normal

4-2/ Ensemble des points M tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

4-3/ Équation cartésienne de la droite $D(A, \vec{n})$

4-4/ Orthogonalité de deux droites

4-5/ Distance d'un point à une droite

V- Cercle dans le plan (Étude analytique)

5-1/ Équation cartésienne du cercle $C(\Omega(a, b); r)$

5-2/ Équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

5-3/ Présentation paramétrique d'un cercle

5-4/ Étude l'ensemble des points $\{M(x, y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$

5-5/ Étude les positions relatives d'un cercle et d'une droite

5-6 Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- Rappels

1-1/ Produit scalaire

Définition

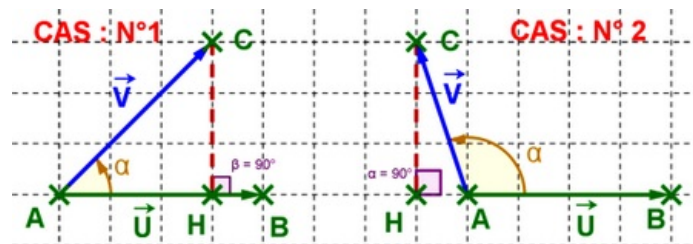
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

Si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A \neq B$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$), alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens (Cas n°1).
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés (Cas n°2).



$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ est appelé la norme du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on le note $\|\vec{u}\|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ ($\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$).

Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1- La forme trigonométrique du produit scalaire tel que $\overrightarrow{(\vec{u} \cdot \vec{v})} = \overrightarrow{(AB \cdot AC)} \equiv \alpha \ (2\pi)$ est

: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \alpha$ ou encore $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$.

2- Symétrie du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3. Linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v})\end{aligned}$$

4- Positivité du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

5- Produit scalaire est non dégénéré : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

6- Orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1-2/ Base et repère (orthonormé direct)

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (P) .

Le couple $B = (\vec{i}, \vec{j})$ s'appelle base du plan, on dit que le plan (P) est rapporté à la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

O est un point de (P) et $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de (P) .

Le triplet $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle repère de (P) , on dit que le plan est rapporté au repère

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ou encore le plan (P) est muni du repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

$B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$,

dans ce cas le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère orthonormé.

$B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe si et seulement si $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée et $\overline{(\vec{i} \cdot \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, dans ce cas le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère orthonormé direct.

II- Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$

Propriété

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P) .

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

Exemple

III- Formules trigonométriques

3-1/ Formules de $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P) avec $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha (2\pi)$.

On a :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

3-2/ Surface d'un triangle et d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme dans le plan (P) .

La surface S_{ABC} du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$.

La surface S_{ABCD} du parallélogramme $ABCD$ est : $S_{ABCD} = \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$.

Démonstration

IV- Droite dans le plan (Étude analytique)

4-1/ Vecteur normal

Définition

$D(A, \vec{u})$ est une droite dans le plan (P) .

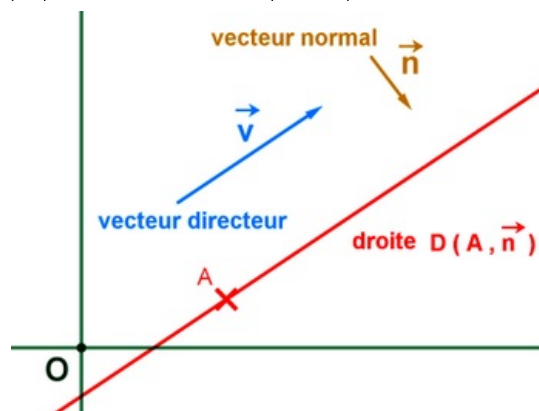
Tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $D(A, \vec{u})$ s'appelle vecteur normal à la droite $D(A, \vec{u})$.

Remarques

Les vecteurs $\alpha \vec{n}$ ($\alpha \neq 0$) sont normaux à la droite $D(A, \vec{u})$.

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à la droite $D(A, \vec{u})$, donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

$\vec{n}(a, b)$ normal à la droite (D) équivaut à $\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur à la droite (D) .



4-2/ Ensemble des points M tel que $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

L'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) tel que $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$ est la droite $D(A, \vec{n})$ passant par A dont le vecteur normal est $\vec{n}$.

Exemple

4-3/ Équation cartésienne de la droite $D(A, \vec{n})$

$M(x, y)$ est un point de (P) appartient à la droite $D(A(x_A, y_A); \vec{n}(a, b))$ si et seulement si $ax + by + c = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c = -ax_A - by_A$

$ax + by + c = 0$ s'appelle l'équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{n})$.

4-4/ Orthogonalité de deux droites

On considère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$ tel que $\vec{n}(a, b)$ et $\vec{n'}(a', b')$ sont les vecteurs normaux respectivement à (D) et (D') .

On a :

$$(D') \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

4-5/ Distance d'un point à une droite

$D(A, \vec{u})$ est une droite dans le plan (P) .

A est un point de (P) et H sa projection orthogonale sur (D) .

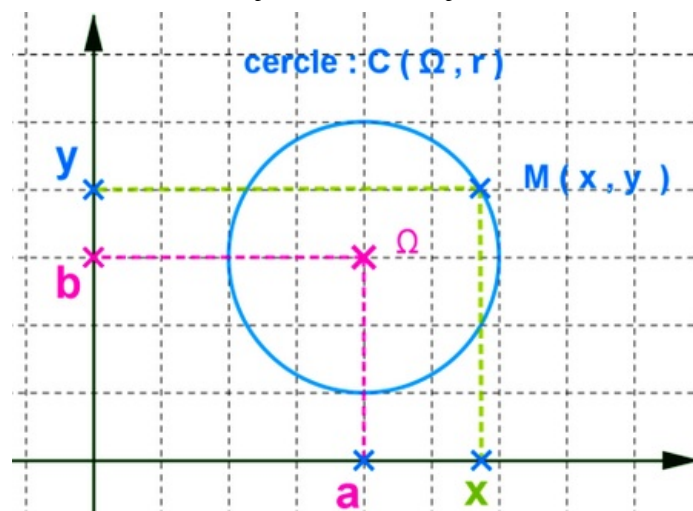
La distance AH est appelée la distance de A à (D) .

On note : $d(A, (D)) = d = AH$.

V- Cercle dans le plan (Étude analytique)

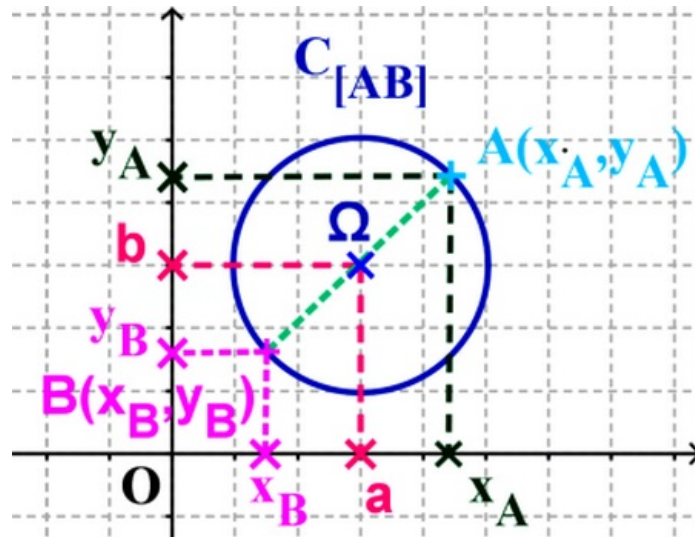
5-1/ Équation cartésienne du cercle $C(\Omega(a, b); r)$

Tout cercle $C(\Omega(a, b); r)$ du plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ou encore $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.



5-2/ Équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

L'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est : $M(x, y) \in C[A; B] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$



5-3/ Présentation paramétrique d'un cercle

$C(\Omega(a, b); r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

Pour tout $M(x, y)$ du plan (P) , on a :
$$\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$$

On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle $C(\Omega(a, b); r)$.

5-4/ Étude l'ensemble des points $\{M(x, y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$

L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est :

Si $\Delta = a^2 + b^2 - 4c < 0$, on a $S = \emptyset$.

Si $\Delta = a^2 + b^2 - 4c = 0$, on a $S = \left\{ \Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) \right\}$ (un point et un seul).

Si $\Delta = a^2 + b^2 - 4c > 0$, on a $S = (C) = C\left(\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right); r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}\right)$ (un cercle).

5-5/ Étude les positions relatives d'un cercle et d'une droite

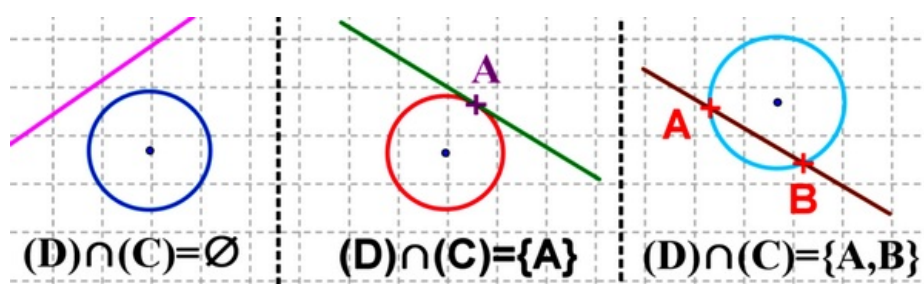
(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre Ω et de rayon r .

(D) est à l'extérieure du cercle (C) si et seulement si $d(\Omega, (D)) > r$, dans ce cas

$(D) \cap (C) = \emptyset$.

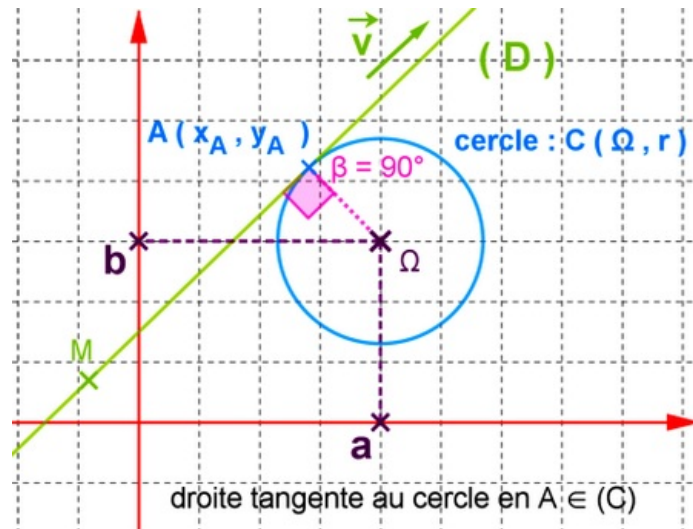
(D) coupe le cercle (C) si et seulement si $d(\Omega, (D)) < r$, dans ce cas $(D) \cap (C) = \{A, B\}$.

(D) est tangente au cercle (C) si et seulement si $d(\Omega, (D)) = r$, dans ce cas $(D) \cap (C) = \{A\}$



5-6/ Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle

L'équation cartésienne de la droite (D) tangente au cercle $C(\Omega, r)$ en un point $A(x_A, y_A)$ de $C(\Omega, r)$ est $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ ou encore $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\Omega - x_A \\ y_\Omega - y_A \end{pmatrix} = 0$.



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soient $A(3;3)$, $B(1;1)$ et $C(1;3)$ trois points dans le plan.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$.
- En déduire $(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}})$ la mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$.
- Calculer l'aire du triangle ABC .

6-2/ Exercice 2

Soient $A(1;2)$, $B(3;4)$ et $C(0;3)$ trois points dans le plan.

- Déterminer l'équation de la droite (D) médiatrice de $[AB]$.
- Déterminer l'équation de (Δ) la hauteur du triangle ABC qui passe par A .
- Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur $\vec{n}$ normale dans chaque cas :
 - 3-1/ $A(2;3)$ et $\vec{n}(3;1)$.
 - 3-2/ $A(-2;1)$ et $\vec{n}(2;0)$.

6-3/ Exercice 3

- Déterminer l'équation cartésienne de cercle (C) de diamètre $[AB]$ avec $A(-1;1)$ et $B(1;3)$ par deux méthode différentes.
- Déterminer l'équation cartésienne de cercle (C) de centre $\Omega(1;3)$ et de rayon $R = 3$.

6-4/ Exercice 4

1. Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble E des points $M(x; y)$ vérifiant :

1 $(E) : x^2 + y^2 - 9 = 0$

2 $(E) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

3 $(E) : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7 = 0$

4 $(E) : x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$

2. Donner la représentation paramétrique de cercle (C) de centre Ω et de rayon R dans chaque cas :

1 $\Omega(2; -1)$ et $R = 2$

2 $\Omega(0; 2)$ et $R = \sqrt{3}$

6-5/ Exercice 5

1. Étudier la position relative du cercle (C) et de la droite (D) dans chaque cas :

1 $\begin{cases} (C) : x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0 \\ (D) : x - y - 3 = 0 \end{cases}$

2 $\begin{cases} (C) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ (D) : 2x + y + 4 = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} (C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0 \\ (D) : x - y + 3 = 0 \end{cases}$

6-6/ Exercice 6

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points : $A(5; 0)$, $B(7; 4)$, $C(3; 3)$ et $D(1; 1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du point J milieu du segment $[CD]$.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) médiatrice du $[AB]$.
4. Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) de diamètre $[CD]$ de deux façons différentes.
5. Calculer la distance d entre le point J et la droite (Δ) .
6. Étudier la position relative de la droite (Δ) et le cercle (C) .